

# LA TEORIA DEGLI ERRORI

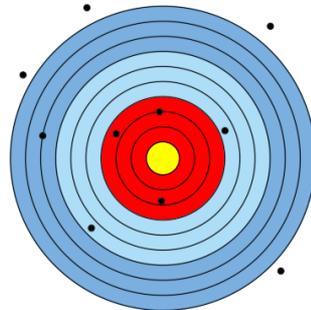
Ripetendo più volte la misura di una grandezza fisica si ottengono valori che differiscono tra loro.

La teoria degli errori si occupa di rilevare e correggere il più possibile gli errori che si verificano durante le misurazioni.

Nell'eseguire la misurazione di una grandezza fisica possiamo incorrere in vari tipi di errore:

## 1) Errori grossolani

In genere sono errori dovuti alla distrazione dell'operatore. Essi sono in genere grandi e possono essere di segno positivo o negativo (cioè si può ottenere sia un valore più grande che un valore più piccolo della grandezza misurata). Un errore grossolano, ad esempio, si può commettere trascrivendo la misura in modo non corretto, oppure nel contare una volta in più o in meno il valore della grandezza da misurare nell'operazione di confronto. Ci si accorge dell'errore eseguendo una seconda volta la misurazione e riscontrando la notevole diversità con l'osservazione eseguita in precedenza.

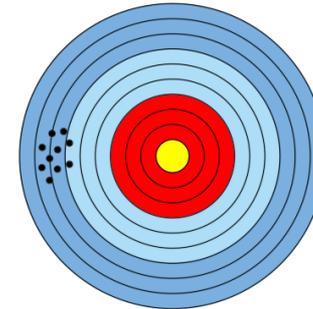


grossolani

## 2) Errori sistematici

Posso dipendere **dallo strumento** oppure dal **metodo di misura** e normalmente hanno lo stesso segno.

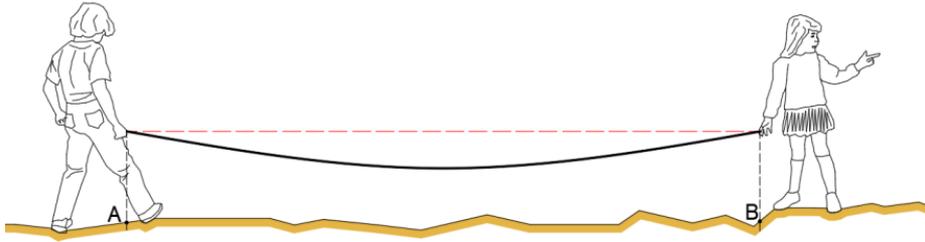
**Dovuti allo strumento.** Essi sono molto pericolosi perché l'operatore non riesce a vederli anche ripetendo varie volte le misure. Immaginiamo ad esempio di avere una rotella metrica di lunghezza nominale 50,00 m ma la cui lunghezza effettiva di 49,98 cm. Le misurazioni con questo strumento saranno affette da un errore che porta a valutare le distanze sempre inferiori a quelle effettive.



sistematici

# LA TEORIA DEGLI ERRORI

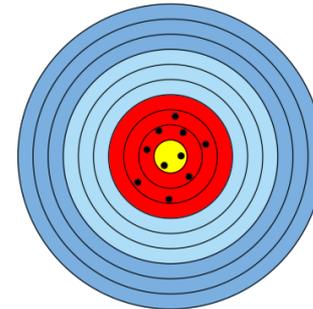
**Dovuti al metodo di misura.** A volte sono dovuti al non corretto modo di operare, come ad esempio misurare una distanza con una rotella metrica senza tendere perfettamente il nastro (vedi figura).



Una volta riscontrato questo errore può essere eliminato procedendo alla rettifica dello strumento oppure utilizzando uno strumento più preciso.

## 3) Errori accidentali

Sono errori di piccola entità che non hanno un'unica causa, e possono essere positivi o negativi. Essi sono causati ad esempio da variazioni di temperatura, di umidità, dal vento, dall'affaticamento della vista dell'operatore .... È per questo motivo sono errori di piccola entità e si presentano con segno alterno. Contrariamente agli errori grossolani o sistematici, che si possono eliminare con particolari accorgimenti, questi errori **non si possono eliminare**, ma è stata elaborata la teoria degli errori che ci consente di ridurre tali errori (se si dispone di un numero sufficiente di misurazioni).



accidentali

# LA TEORIA DEGLI ERRORI

## Scopo della teoria degli errori

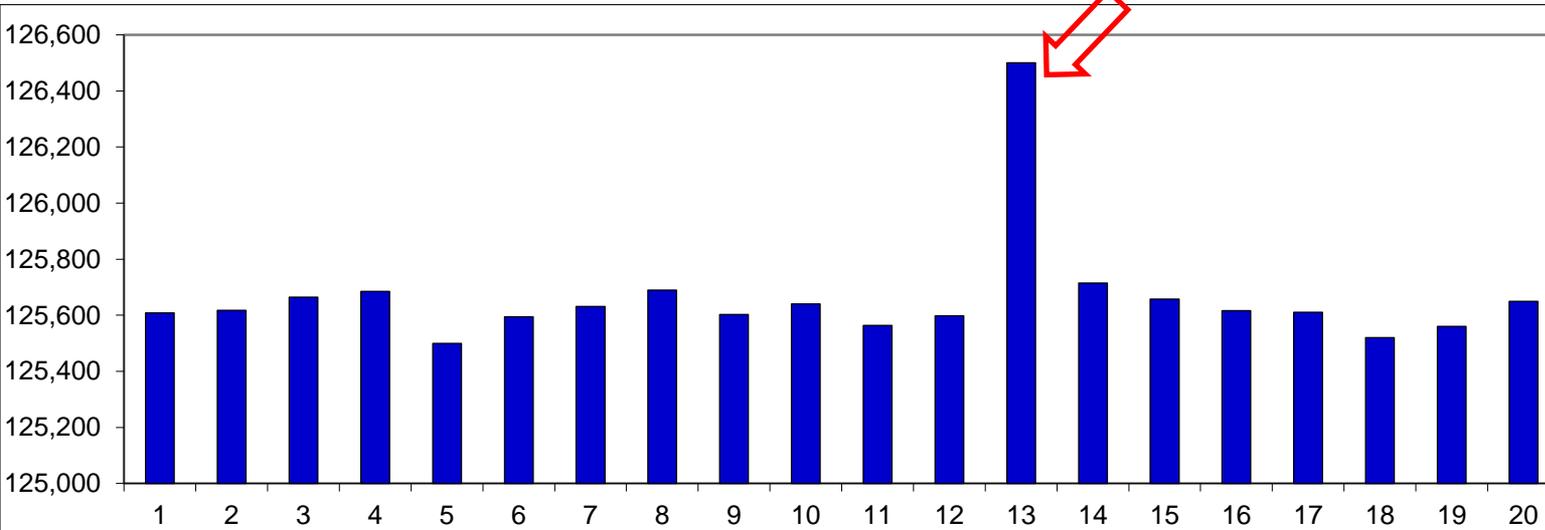
Disponendo di una serie di misure di una grandezza, la teoria degli errori ci consente di:

- determinare il valore più probabile;
- valutare l'errore medio commesso nelle singole misure;
- individuare il limite oltre il quale un errore non può essere accettato;
- individuare l'errore di cui è affetto il valore più probabile della grandezza.

Per iniziare, data una serie di misurazioni, la prima cosa da fare è il **grafico delle misure**.

Si riportano sull'asse delle ascisse il numero delle misurazioni e su quello delle ordinate il loro valore (prendendo un valore di riferimento più piccolo di tutte le misure eseguite).

Eventuali misure che presentano un errore grossolano vanno eliminate.



N	MISURE (m)
1	125,611
2	125,608
3	125,595
4	125,603
5	125,598
6	125,616
7	125,618
8	125,631
9	125,640
10	125,650
11	125,658
12	125,665
13	126,500
14	125,564
15	125,560
16	125,685
17	125,690
18	125,715
19	125,520
20	125,500

# LA TEORIA DEGLI ERRORI

## Media aritmetica

Il **valore più probabile** di una serie di misurazioni è dato dalla **media aritmetica** delle misure eseguite (della stessa precisione).

$$x_M = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \quad (\text{nell'esempio le misure sono 19})$$

## Scarti

Si definisce **scarto** la differenza tra i valori delle singole misure ed il valore della media aritmetica

$$s_i = x_i - x_M \quad (\text{nell'esempio ci sono 19 scarti})$$

## Proprietà della media aritmetica

La media aritmetica gode di due importanti proprietà:

**1) La somma algebrica degli scarti è uguale a zero**

$$\sum_{i=1}^N s_i = s_1 + s_2 + \dots + s_N = 0$$

**2) La somma dei quadrati degli scarti è minima**

$$\sum_{i=1}^N s_i^2 = \text{minimo} \quad (\text{per questo motivo è anche detta teoria dei minimi quadrati})$$

questa seconda proprietà dice che se gli scarti vengono calcolati considerando un valore diverso dalla media aritmetica si avrebbe un valore maggiore della somma dei quadrati degli scarti.

N	MISURE (m)
1	125,611
2	125,608
3	125,595
4	125,603
5	125,598
6	125,616
7	125,618
8	125,631
9	125,640
10	125,650
11	125,658
12	125,665
13	126,500
14	125,564
15	125,560
16	125,685
17	125,690
18	125,715
19	125,520
20	125,500

# LA TEORIA DEGLI ERRORI

Media aritmetica

$$x_M = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{125,611 + \dots + 125,000}{19} = 125,6172 \text{ m}$$

1) La somma algebrica degli scarti è uguale a zero

$$\sum_{i=1}^N s_i = -0,0062 - 0,0092 + \dots - 0,1172 = 0,0000 \text{ m}$$

2) La somma dei quadrati degli scarti è minima

$$\sum_{i=1}^N s_i^2 = 0,00003857 + 0,00008483 + \dots + 0,01373831 = 0,05567116 \text{ m}^2$$

N	MISURE m	SCARTI m	SCARTI QUADR. m <sup>2</sup>
1	125,611	-0,0062	0,00003857
2	125,608	-0,0092	0,00008483
3	125,595	-0,0222	0,00049331
4	125,603	-0,0142	0,00020194
5	125,598	-0,0192	0,00036904
6	125,616	-0,0012	0,00000147
7	125,618	0,0008	0,00000062
8	125,631	0,0138	0,00019015
9	125,640	0,0228	0,00051936
10	125,650	0,0328	0,00107515
11	125,658	0,0408	0,00166378
12	125,665	0,0478	0,00228383
13	126,500		
14	125,564	-0,0532	0,00283136
15	125,560	-0,0572	0,00327304
16	125,685	0,0678	0,00459541
17	125,690	0,0728	0,00529831
18	125,715	0,0978	0,00956278
19	125,520	-0,0972	0,00944989
20	125,500	-0,1172	0,01373831
	media	somma	somma
	125,6172	0,0000	0,05567116

# LA TEORIA DEGLI ERRORI

## Lo scarto quadratico medio (s.q.m.)

Lo s.q.m. di una misurazione è un **indice della precisione delle misure** eseguite e si calcola con la seguente formula

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N s_i^2}{N-1}}$$

## Errore medio della media

L'errore medio della media è un **indice di precisione del valore medio** e si calcola con la seguente formula

$$\sigma_M = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

## Valore finale

Il valore finale della misura viene espresso nel seguente modo:

$$x = x_M \pm \sigma_M$$

Nell'esempio si ha:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{0,05567116}{19-1}} = 0,0556 \text{ m}$$

$$\sigma_M = \pm \frac{0,0556}{\sqrt{19}} = \pm 0,0128 \text{ m}$$

$$x = 125,6172 \pm 0,0128 \text{ m}$$

N	MISURE m	SCARTI m	SCARTI QUADR. m <sup>2</sup>
1	125,611	-0,0062	0,00003857
2	125,608	-0,0092	0,00008483
3	125,595	-0,0222	0,00049331
4	125,603	-0,0142	0,00020194
5	125,598	-0,0192	0,00036904
6	125,616	-0,0012	0,00000147
7	125,618	0,0008	0,00000062
8	125,631	0,0138	0,00019015
9	125,640	0,0228	0,00051936
10	125,650	0,0328	0,00107515
11	125,658	0,0408	0,00166378
12	125,665	0,0478	0,00228383
13	126,500		
14	125,564	-0,0532	0,00283136
15	125,560	-0,0572	0,00327304
16	125,685	0,0678	0,00459541
17	125,690	0,0728	0,00529831
18	125,715	0,0978	0,00956278
19	125,520	-0,0972	0,00944989
20	125,500	-0,1172	0,01373831

	media	somma	somma
	125,6172	0,0000	0,05567116

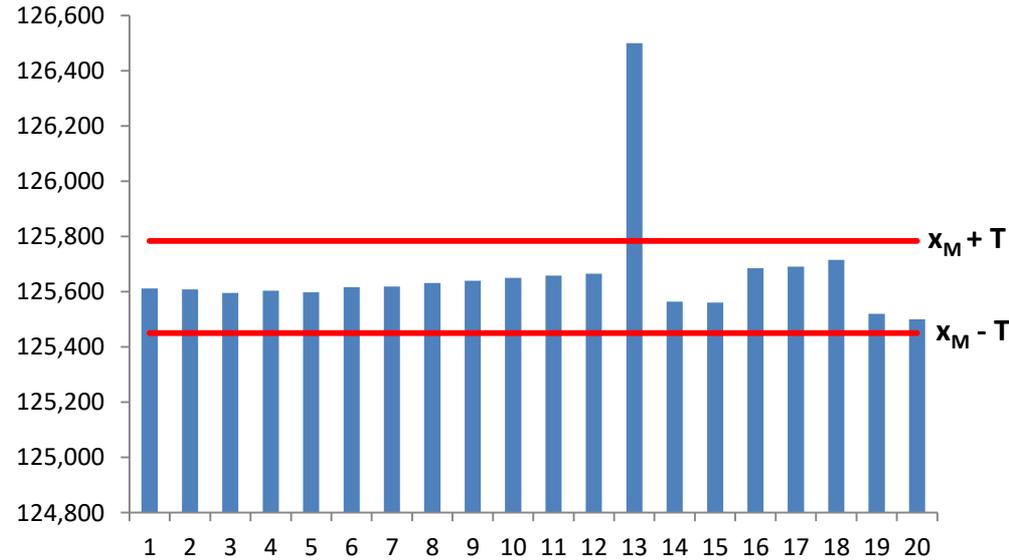
# LA TEORIA DEGLI ERRORI

## Tolleranza

La tolleranza rappresenta il valore massimo che lo scarto di una misura può avere. Se lo scarto di una misura supera la tolleranza ciò sta ad indicare che si è commesso un errore di tipo grossolano. La tolleranza si calcola con la seguente formula

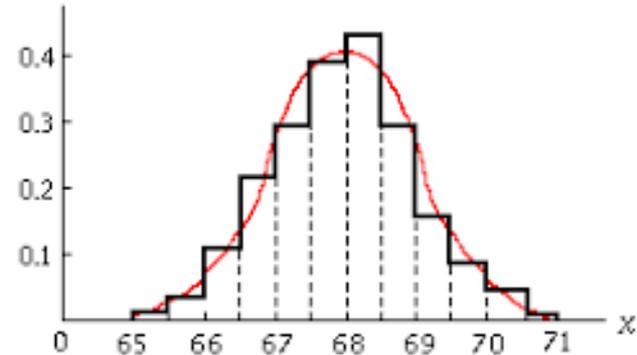
$$T = \pm 3 \cdot \sigma$$

Nel nostro esempio  $T = \pm 3 \cdot 0,0556 = 0,1668 m$



## Istogramma delle frequenze

È un diagramma che serve per vedere la distribuzione degli errori rispetto al valore medio. Si costruisce assegnando un intervallo di errore e riportando il numero degli scarti contenuti in quell'intervallo. Congiungendo i punti ottenuti si approssima la **curva di Gauss**.



# LA TEORIA DEGLI ERRORI

## Istogramma delle frequenze

Nel nostro caso si ha

N	MISURE m	SCARTI m	SCARTI QUADR. m <sup>2</sup>		
				$\Delta x = 2 \text{ cm}$	f
1	125,611	-0,0062	0,00003857		
2	125,608	-0,0092	0,00008483		
3	125,595	-0,0222	0,00049331	+9 ÷ +11 cm	1
4	125,603	-0,0142	0,00020194	+7 ÷ +9 cm	1
5	125,598	-0,0192	0,00036904	+5 ÷ +7 cm	1
6	125,616	-0,0012	0,00000147	+3 ÷ +5 cm	3
7	125,618	0,0008	0,00000062	+1 ÷ +3 cm	2
8	125,631	0,0138	0,00019015	-1 ÷ +1 cm	4
9	125,640	0,0228	0,00051936	-1 ÷ -3 cm	3
10	125,650	0,0328	0,00107515	-3 ÷ -5 cm	0
11	125,658	0,0408	0,00166378	-5 ÷ -7 cm	2
12	125,665	0,0478	0,00228383	-7 ÷ -9 cm	0
13	126,500			-9 ÷ -11 cm	1
14	125,564	-0,0532	0,00283136	-11 ÷ -13 cm	1
15	125,560	-0,0572	0,00327304		19
16	125,685	0,0678	0,00459541		
17	125,690	0,0728	0,00529831		
18	125,715	0,0978	0,00956278		
19	125,520	-0,0972	0,00944989		
20	125,500	-0,1172	0,01373831		

