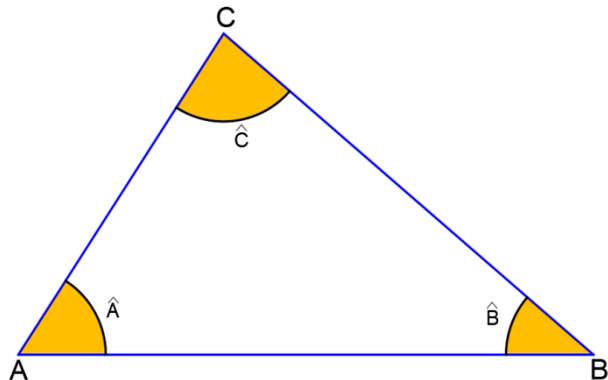
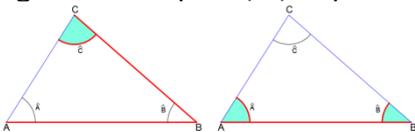


RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI QUALSIASI

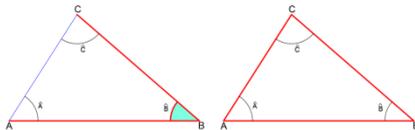


PER RISOLVERE I TRIANGOLI QUALSIASI SI POSSONO APPLICARE DUE TEOREMI:

- 1) TEOREMA DEI SENI** (quando conosco)
- due lati e un angolo opposto (es. AB, BC, \hat{C})
- due angoli e 1 lato (es. \hat{A} , \hat{B} , AB)



- 2) TEOREMA DI CARNOT o del COSENO** (quando conosco)
- due lati e un angolo compreso (es. AB, BC, \hat{B})
- tre lati (AB, BC, AC)



TEOREMA DEI SENI: in un triangolo qualsiasi il rapporto tra una lato ed il seno dell'angolo opposto è costante

$$\frac{AB}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{BC}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{AC}{\text{sen } \hat{B}}$$

La proporzione va usata **scrivendo due termini per volta e non deve comparire più di una incognita**. Esempio: se conosco AB, BC e A si scriverà

$$\frac{AB}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{BC}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \hat{C} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{AB \cdot \text{sen } \hat{A}}{BC}\right)$$

Se conosco BC, \hat{A} , \hat{B} si scriverà:

$$\frac{BC}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{AC}{\text{sen } \hat{B}} \rightarrow AC = \frac{BC \cdot \text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \hat{A}}$$

Nota. Il teorema dei seni ha un inconveniente. Quale?

Esercizio. Di un triangolo si conoscono:

$$AC = 96,615 \text{ m}$$

$$\hat{BCA} = \gamma = 109^{\circ},4719$$

$$\hat{CAB} = \alpha = 61^{\circ},1005$$

Calcolare:

$$\hat{ABC}, AB, BC, S_{ABC}$$

Esercizio. Di un triangolo si conoscono:

$$AC = 96,615 \text{ m}$$

$$\widehat{BCA} = \gamma = 109^{\circ},4719$$

$$\widehat{CAB} = \alpha = 61^{\circ},1005$$

Calcolare:

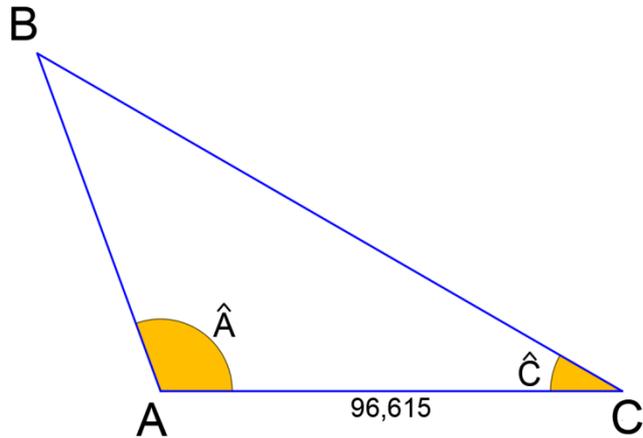
$$\widehat{ABC}, AB, BC, S_{ABC}$$

Per prima cosa si trova il terzo angolo (la somma deve fare un angolo piatto)

$$\widehat{B} = 200^{\circ} - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 200^{\circ} - (109^{\circ},4719 + 61^{\circ},1005) = 29^{\circ},4276$$

Ora si scrive il teorema dei seni per trovare BC

Svolgimento



Esercizio. Di un triangolo si conoscono:

$$AC = 96,615 \text{ m}$$

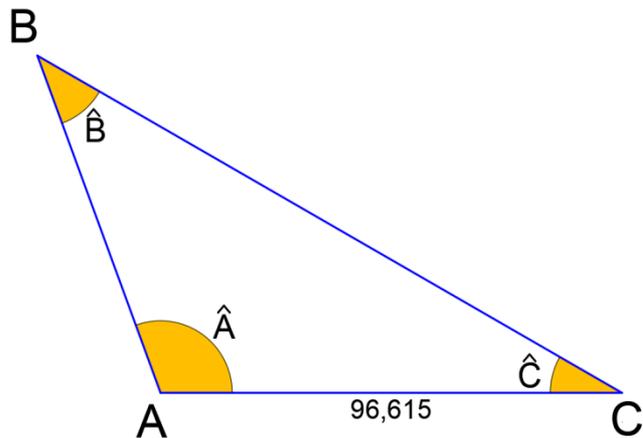
$$\widehat{BCA} = \gamma = 109^{\circ},4719$$

$$\widehat{CAB} = \alpha = 61^{\circ},1005$$

Calcolare:

$$\widehat{ABC}, AB, BC, S_{ABC}$$

Svolgimento



Per prima cosa si trova il terzo angolo (la somma deve fare un angolo piatto)

$$\widehat{B} = 200^{\circ} - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 200^{\circ} - (109^{\circ},4719 + 61^{\circ},1005) = 29^{\circ},4276$$

Ora si scrive il teorema dei seni per trovare BC

$$\frac{\overset{\times}{AC}}{\underset{\times}{\text{sen } \widehat{B}}} = \frac{BC}{\text{sen } \widehat{A}} \quad \rightarrow \quad BC = \frac{AC \cdot \text{sen } \widehat{A}}{\text{sen } \widehat{B}}$$

$$BC = \frac{96,615 \cdot \text{sen } 61^{\circ},1005}{\text{sen } 29^{\circ},4276} = 177,444 \text{ m}$$

Esercizio. Di un triangolo si conoscono:

$$AC = 96,615 \text{ m}$$

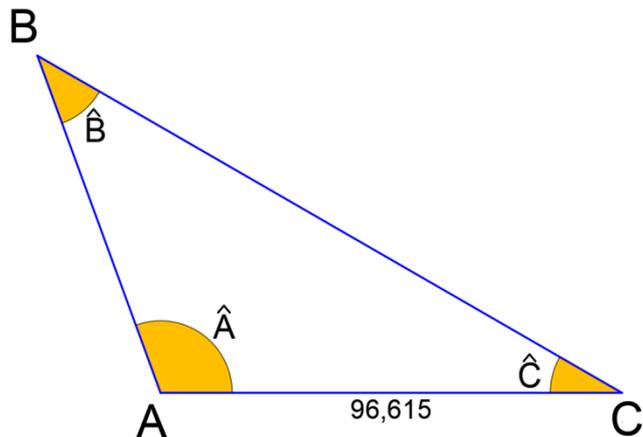
$$\widehat{BCA} = \gamma = 109^{\circ},4719$$

$$\widehat{CAB} = \alpha = 61^{\circ},1005$$

Calcolare:

$$\widehat{ABC}, AB, BC, S_{ABC}$$

Svolgimento



Per prima cosa si trova il terzo angolo (la somma deve fare un angolo piatto)

$$\widehat{B} = 200^{\circ} - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 200^{\circ} - (109^{\circ},4719 + 61^{\circ},1005) = 29^{\circ},4276$$

Ora si scrive il teorema dei seni per trovare BC

$$\frac{\overset{\times}{AC}}{\underset{\times}{\text{sen } \widehat{B}}} = \frac{BC}{\text{sen } \widehat{A}} \rightarrow BC = \frac{AC \cdot \text{sen } \widehat{A}}{\text{sen } \widehat{B}}$$

$$BC = \frac{96,615 \cdot \text{sen } 61^{\circ},1005}{\text{sen } 29^{\circ},4276} = 177,444 \text{ m}$$

teorema dei seni per trovare AB

$$\frac{\overset{\times}{AC}}{\underset{\times}{\text{sen } \widehat{B}}} = \frac{AB}{\underset{\times}{\text{sen } \widehat{C}}} \rightarrow AB = \frac{AC \cdot \text{sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{B}}$$

$$AB = \frac{96,615 \cdot \text{sen } 109^{\circ},4719}{\text{sen } 29^{\circ},4276} = 214,251 \text{ m}$$

calcolo area

Esercizio. Di un triangolo si conoscono:

$$AC = 96,615 \text{ m}$$

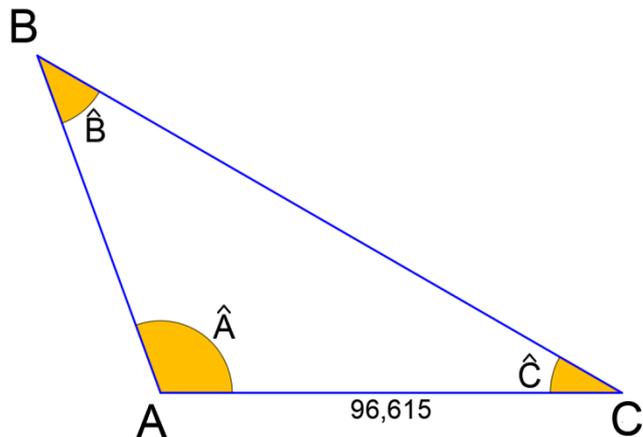
$$\widehat{BCA} = \gamma = 109^{\circ},4719$$

$$\widehat{CAB} = \alpha = 61^{\circ},1005$$

Calcolare:

$$\widehat{ABC}, AB, BC, S_{ABC}$$

Svolgimento



Per prima cosa si trova il terzo angolo (la somma deve fare un angolo piatto)

$$\widehat{B} = 200^{\circ} - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 200^{\circ} - (109^{\circ},4719 + 61^{\circ},1005) = 29^{\circ},4276$$

Ora si scrive il teorema dei seni per trovare BC

$$\frac{\overset{\times}{AC}}{\underset{\times}{\text{sen } \widehat{B}}} = \frac{BC}{\underset{\times}{\text{sen } \widehat{A}}} \rightarrow BC = \frac{AC \cdot \text{sen } \widehat{A}}{\text{sen } \widehat{B}}$$

$$BC = \frac{96,615 \cdot \text{sen } 61^{\circ},1005}{\text{sen } 29^{\circ},4276} = 177,444 \text{ m}$$

teorema dei seni per trovare AB

$$\frac{\overset{\times}{AC}}{\underset{\times}{\text{sen } \widehat{B}}} = \frac{AB}{\underset{\times}{\text{sen } \widehat{C}}} \rightarrow AB = \frac{AC \cdot \text{sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{B}}$$

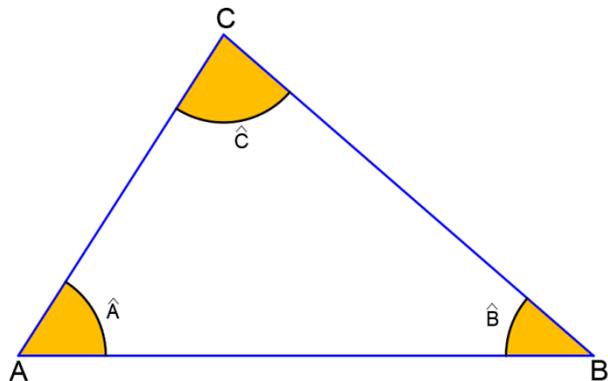
$$AB = \frac{96,615 \cdot \text{sen } 109^{\circ},4719}{\text{sen } 29^{\circ},4276} = 214,251 \text{ m}$$

calcolo area

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \text{sen } \widehat{A}$$

$$S_{ABC} = 0,5 \cdot 214,251 \cdot 96,615 \cdot \text{sen } 61^{\circ},1005 = 8477,18 \text{ m}^2$$

RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI QUALSIASI



TEOREMA DI CARNOT:

Conoscendo 2 lati ed 1 angolo compreso si può trovare il terzo lato con la seguente formula (noti AB , BC , \hat{B}):

$$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A})}$$

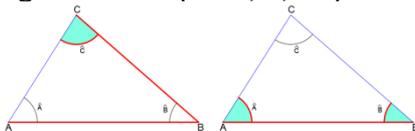
TEOREMA DI CARNOT INVERSO:

Conoscendo 3 lati si possono trovare gli angoli interni con la seguente formula (noti AB , BC , AC):

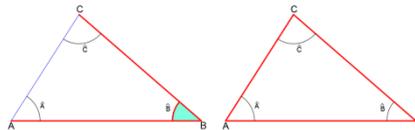
$$\hat{A} = \cos^{-1} \left(\frac{(AB^2 + AC^2 - BC^2)}{(2 \cdot AB \cdot AC)} \right)$$

PER RISOLVERE I TRIANGOLI QUALSIASI SI POSSONO APPLICARE DUE TEOREMI:

- 1) TEOREMA DEI SENI** (quando conosco)
- due lati e un angolo opposto (es. AB , BC , \hat{C})
- due angoli e 1 lato (es. \hat{A} , \hat{B} , AB)



- 2) TEOREMA DI CARNOT o del COSENO** (quando conosco)
- due lati e un angolo compreso (es. AB , BC , \hat{B})
- tre lati (AB , BC , AC)



Esercizio. Di un triangolo si conoscono:

$AC = 980,050$ m

$BC = 700,400$ m

$\hat{BCA} = \gamma = 27^\circ,4080$

Calcolare:

a , b , AB , S_{ABC}

Esercizio. Di un triangolo si conoscono:

AC = 980,050 m

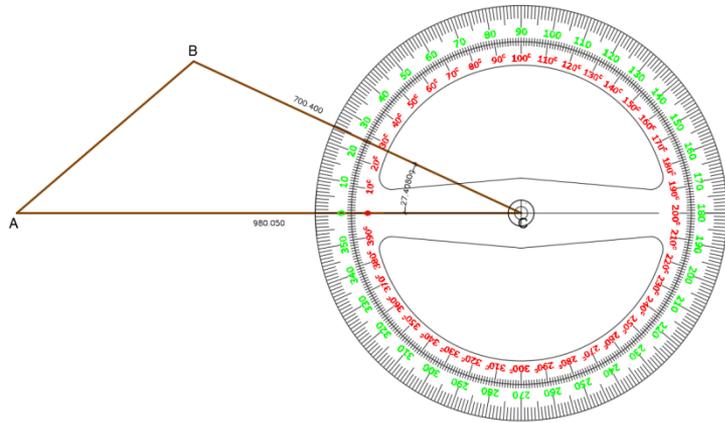
BC = 700,400 m

$\widehat{BCA} = \gamma = 27^{\circ},4080$

Calcolare:

α , β , AB, S_{ABC}

Disegno scala 1:10000



Svolgimento:

Conoscendo 2 lati ed 1 angolo compreso si può trovare il terzo lato con la seguente formula (noti AC, BC, γ):

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \gamma}$$

Esercizio. Di un triangolo si conoscono:

AC = 980,050 m

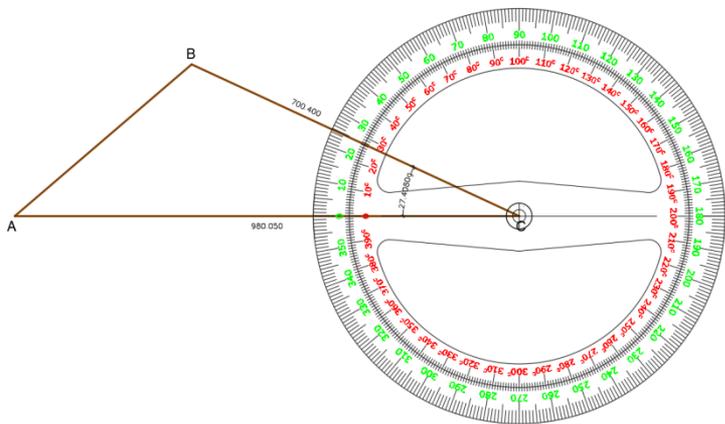
BC = 700,400 m

$\widehat{BCA} = \gamma = 27^{\circ},4080$

Calcolare:

α , β , AB, S_{ABC}

Disegno scala 1:10000



Svolgimento:

Conoscendo 2 lati ed 1 angolo compreso si può trovare il terzo lato con la seguente formula (noti AC, BC, γ):

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \gamma}$$

$$AB = \sqrt{(980,050^2 + 700,400^2 - 2 \cdot 980,050 \cdot 700,400 \cdot \cos 27^{\circ},4080)} =$$

$$AB = 451,089 \text{ m}$$

Conoscendo ora i 3 lati si possono trovare gli angoli interni con la formula di Carnot inverso:

Esercizio. Di un triangolo si conoscono:

AC = 980,050 m

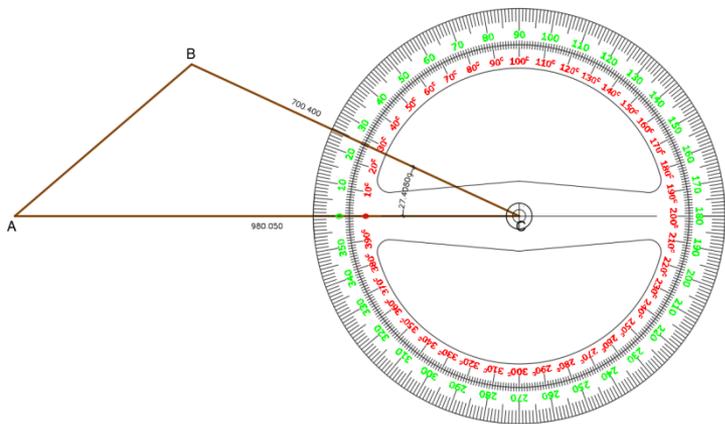
BC = 700,400 m

$\widehat{BCA} = \gamma = 27^{\circ}, 4080$

Calcolare:

α , β , AB, S_{ABC}

Disegno scala 1:10000



Svolgimento:

Conoscendo 2 lati ed 1 angolo compreso si può trovare il terzo lato con la seguente formula (noti AC, BC, γ):

$$AB = \sqrt{(AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \gamma)}$$

$$AB = \sqrt{(980,050^2 + 700,400^2 - 2 \cdot 980,050 \cdot 700,400 \cdot \cos 27^{\circ}, 4080)} =$$

$$AB = 451,089 \text{ m}$$

Conoscendo ora i 3 lati si possono trovare gli angoli interni con la formula di Carnot inverso:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \right)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{451,089^2 + 980,050^2 - 700,400^2}{2 \cdot 451,089 \cdot 980,050} \right) = 44^{\circ}, 8797$$

il terzo angolo si trova per differenza:

Esercizio. Di un triangolo si conoscono:

AC = 980,050 m

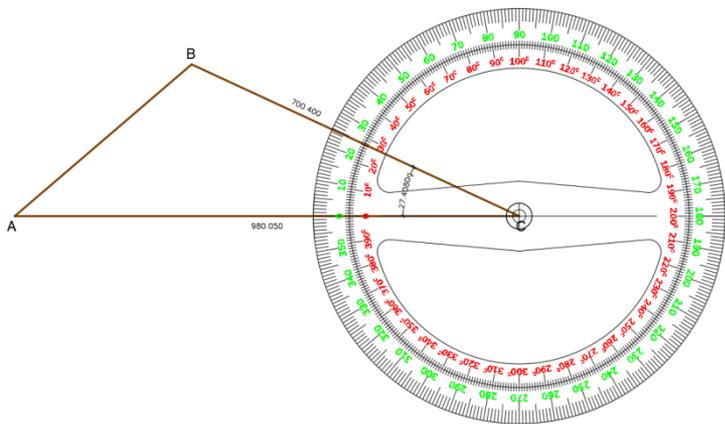
BC = 700,400 m

$\widehat{BCA} = \gamma = 27^{\circ},4080$

Calcolare:

α , β , AB, S_{ABC}

Disegno scala 1:10000



Svolgimento:

Conoscendo 2 lati ed 1 angolo compreso si può trovare il terzo lato con la seguente formula (noti AC, BC, γ):

$$AB = \sqrt{(AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \gamma)}$$

$$AB = \sqrt{(980,050^2 + 700,400^2 - 2 \cdot 980,050 \cdot 700,400 \cdot \cos 27^{\circ},4080)} =$$

$$AB = 451,089 \text{ m}$$

Conoscendo ora i 3 lati si possono trovare gli angoli interni con la formula di Carnot inverso:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \right)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{451,089^2 + 980,050^2 - 700,400^2}{2 \cdot 451,089 \cdot 980,050} \right) = 44^{\circ},8797$$

il terzo angolo si trova per differenza:

$$\beta = 200^{\circ} - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta = 200^{\circ} - (44^{\circ},8797 + 27^{\circ},4080) = 127^{\circ},7123$$

infine l'area:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \gamma$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 980,050 \cdot 700,400 \cdot \sin 27^{\circ},4080 = 311206,07 \text{ m}^2$$

Esercizio.

Di un triangolo si conoscono:

$$AB = 76,615 \text{ m}$$

$$\widehat{BCA} = \gamma = 48^{\circ},0844$$

$$\widehat{CAB} = \alpha = 81^{\circ},7479$$

Calcolare:

$$\beta = \widehat{ABC}, AC, BC, S_{ABC}$$

Disegno scala 1:1000

Esercizio.

Di un triangolo si conoscono:

$$AB = 76,615 \text{ m}$$

$$\widehat{BCA} = \gamma = 48^{\circ},0844$$

$$\widehat{CAB} = \alpha = 81^{\circ},7479$$

Calcolare:

$$\beta = \widehat{ABC}, AC, BC, S_{ABC}$$

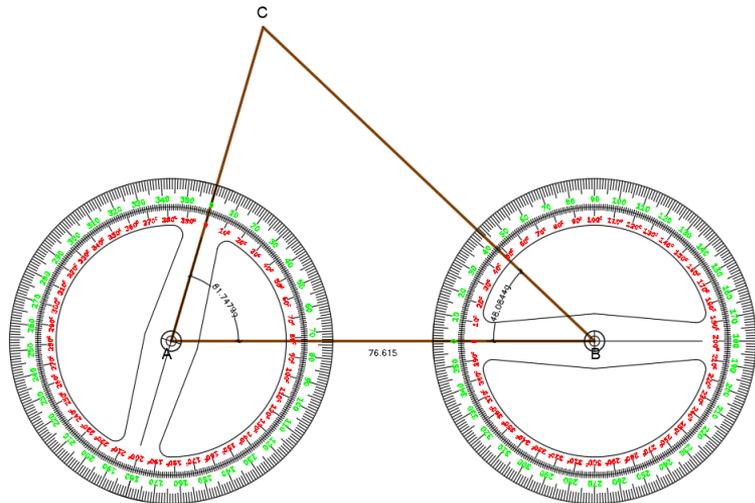
Disegno scala 1:1000

Svolgimento:

prima di fare il disegno dobbiamo calcolare l'angolo mancante

$$\beta = 200^{\circ} - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta = 200^{\circ} - (81^{\circ},7479 + 48^{\circ},0844) = 70^{\circ},1677$$



Esercizio.

Di un triangolo si conoscono:

$$AB = 76,615 \text{ m}$$

$$\widehat{BCA} = \gamma = 48^{\circ},0844$$

$$\widehat{CAB} = \alpha = 81^{\circ},7479$$

Calcolare:

$$\beta = \widehat{ABC}, AC, BC, S_{ABC}$$

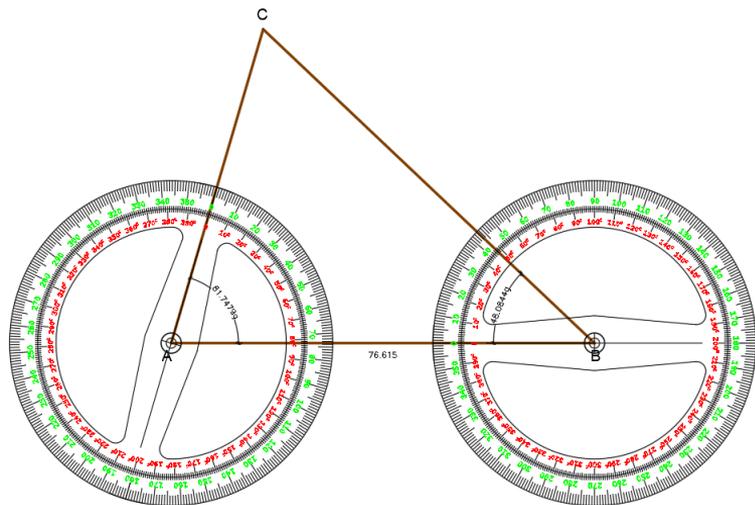
Disegno scala 1:1000

Svolgimento:

prima di fare il disegno dobbiamo calcolare l'angolo mancante

$$\beta = 200^{\circ} - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta = 200^{\circ} - (81^{\circ},7479 + 48^{\circ},0844) = 70^{\circ},1677$$



Ora si scrive il teorema dei seni per trovare BC

$$\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin \alpha} \quad \longrightarrow \quad BC = \frac{AB \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$BC = \frac{76,615 \cdot \sin 81^{\circ},7479}{\sin 48^{\circ},0844} = 82,367 \text{ m}$$

Esercizio.

Di un triangolo si conoscono:

$$AB = 76,615 \text{ m}$$

$$\widehat{BCA} = \gamma = 48^{\circ},0844$$

$$\widehat{CAB} = \alpha = 81^{\circ},7479$$

Calcolare:

$$\beta = \widehat{ABC}, AC, BC, S_{ABC}$$

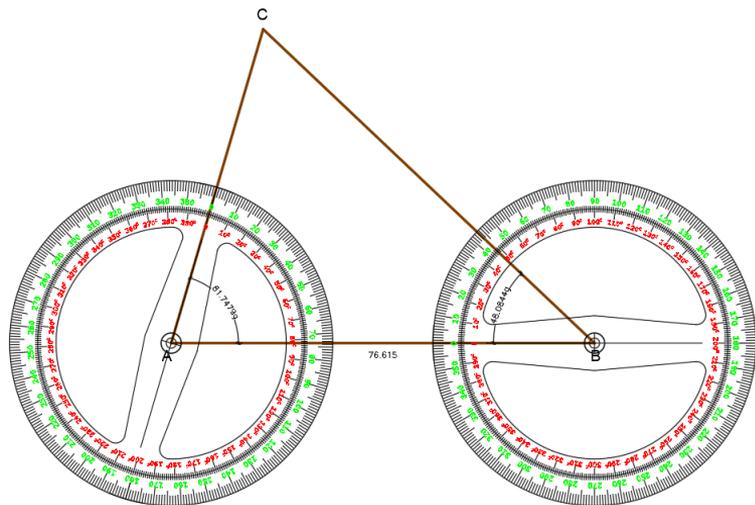
Disegno scala 1:1000

Svolgimento:

prima di fare il disegno dobbiamo calcolare l'angolo mancante

$$\beta = 200^{\circ} - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta = 200^{\circ} - (81^{\circ},7479 + 48^{\circ},0844) = 70^{\circ},1677$$



Ora si scrive il teorema dei seni per trovare BC

$$\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin \alpha} \quad \longrightarrow \quad BC = \frac{AB \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$BC = \frac{76,615 \cdot \sin 81^{\circ},7479}{\sin 48^{\circ},0844} = 82,367 \text{ m}$$

lato AC

$$\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin \beta} \quad \longrightarrow \quad AC = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$AC = \frac{76,615 \cdot \sin 70^{\circ},1677}{\sin 48^{\circ},0844} = 58,866 \text{ m}$$

infine l'area:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \alpha$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 76,615 \cdot 58,866 \cdot \sin 81^{\circ},7479 = 2162,98 \text{ m}^2$$